



TITLE:

微分方程式の線型二段数値解法における切捨誤差の集積について (微分方程式の数値解法研究会報告集)

AUTHOR(S):

清水, 辰次郎

CITATION:

清水, 辰次郎. 微分方程式の線型二段数値解法における切捨誤差の集積について (微分方程式の数値解法研究会報告集). 数理解析研究所講究録 1967, 34: 13-26

ISSUE DATE:

1967-10

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/107580>

RIGHT:

微分方程式の線型二段数値解法 における切捨誤差の集積について

東京理科大学 清水辰次郎

§1. 線型二段数値解法.

四捨五入誤差の数値解析における役割は重要なものにもか、
わらず正確にこれを評価することはできない。ここではそれ
らの誤差の影響と或程度確定にとらえようとするものである。

与えられた常微分方程式を

$$y' = f(x, y)$$

とし、 $f(x, y)$ は或適當な条件を満足するものとする。

線型二段数値解法

$$(1) \quad y_{n+2} = a y_{n+1} + b y_n + h(c f_{n+1} + d f_n)$$

により計算される値 y_n について方程式の解 $y(x)$ (初期値
 $x=0, y(0)=y_0$, 刻み巾 $h, x_n = nh = \bar{x}$) が \bar{x} で存在するとき
 y_0 および f が何であっても

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} y_n = y(\bar{x})$$

が成立するならばその解法は "convergent" であるという。

(1)

Dahlquist は更に強い制限を f に与えて, $y' = f(x, y)$ に対して y_n が収束する, すなわち解法が convergent であるための必要十分な条件を与えたが (1) がその条件を満足するとき最も一般的な形は次のようになる.

$$(2) \quad y_{n+2} = (1+\alpha)y_{n+1} - \alpha y_n + h(\beta f_{n+1} + (1-\alpha-\beta)f_n) \quad 1)$$

ここで $-\infty < \beta < \infty, -1 \leq \alpha < 1$.

§2. 方程式 $y' = -y$ に適用.

解法 (2) を $y(0) = y_0, x = h$ の値 $y(h) = y_1$ として $y' = -y$ に適用すると

$$(3) \quad y_{n+2} = (1+\alpha)y_{n+1} - \alpha y_n - h(\beta y_{n+1} + (1-\alpha-\beta)y_n)$$

(3) を定数係数線型定差方程式とみると λ の二次方程式の二根 λ_1, λ_2 が重要な役割をする.

$$\lambda^2 - (1+\alpha-h\beta)\lambda + \alpha + h(1-\alpha-\beta) = 0$$

与えられた α, β に対し h を十分小さくとすれば h^2 の項が省略できる位とすれば

$$\lambda \doteq \frac{1}{2} \{ (1+\alpha-h\beta) \pm [(1-\alpha)+h(\beta-2)] \}$$

1) ここに述べた解法は open 型のものであるが, closed 型の場合 $y_{n+2} = ay_{n+1} + by_n + h(ef_{n+2} + cf_{n+1} + df_n)$ を $y' = -y$ に適用したときは $y_{n+2} = \frac{1}{1+he}(ay_{n+1} + by_n - h(cf_{n+1} + d y_n))$ となるから同様に論ずることが出来る.

ここで正符号の方を λ_1 , 負符号の方を λ_2 とすれば h は十分小さくとってあるから

$$\lambda_1 > \lambda_2$$

また $-1 < \alpha < 1$ ならば $\lambda_1 = 1 - h$, $\lambda_2 = \alpha + h(1 - \beta)$

$$\text{よって } |\lambda_1| > |\lambda_2|, \quad |\lambda_1| < 1, \quad |\lambda_2| < 1$$

なお $\lambda_1 > 0$, $\alpha > 0$ ならば $\lambda_2 > 0$, $\alpha < 0$ ならば $\lambda_2 < 0$,

$\alpha = 0$ のとき $1 > \beta$ ならば $\lambda_2 > 0$, $1 < \beta$ ならば $\lambda_2 < 0$.

$\alpha = -1$ ならば

$$1 > \beta \text{ のとき } |\lambda_1| < 1, \quad |\lambda_2| < 1,$$

$$1 > \beta \geq 0 \text{ ならば } |\lambda_2| > |\lambda_1|, \quad \beta < 0 \text{ ならば } |\lambda_2| < |\lambda_1|$$

$$1 \leq \beta \text{ のとき } |\lambda_1| < 1, \quad |\lambda_2| \geq 1, \quad |\lambda_2| \geq |\lambda_1|.$$

(3) の正確な計算値は定差方程式の解として

$$y_n = e_1 \lambda_1^n + e_2 \lambda_2^n$$

$$\text{ここで } e_1 = \frac{y_1 - \lambda_2 y_0}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad e_2 = \frac{\lambda_1 y_0 - y_1}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

よって $|\lambda_1| < 1, |\lambda_2| < 1$ なるとき $n \rightarrow \infty$ にて $y_n \rightarrow 0$.

$\lambda_2 = -1$ のとき $y_n = e_1 \lambda_1^n + (-1)^n e_2$, $|\lambda_2| > 1$ のとき $y_n = e_1 \lambda_1^n + (-1)^n e_2 |\lambda_2|^n$ となって振動する

以上は理論値であって各値 y_0, y_1 に切捨誤差等のある場合また h が小であるため途中の計算で小数点以下の桁数が増大し, それらも切捨られるため誤差が混入する.

これらの誤差は後に見るごとく、例えば $C_1=1, C_2=+1$ とすれば、
 計算をやるごとに $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots$
 倍となるかう数回目の計算でも著しく大きな値となり得る、
 一方 $y'=-y$ の真の解は $x \rightarrow \infty$ にて $y \rightarrow 0$ と單調に減少する筈
 であるが、誤差集積の結果は真値との差は簡単にわかりか
 らない筈である。

註. 誤差について次のように呼ぶことにする. 小数点以下
 第 $m+1$ 桁以下切捨を計算毎に行うために生ずる誤差を切捨
 誤差, 第 m 桁目の数字に 1 を加え第 $m+1$ 桁以下切捨を行
 うために生ずる誤差を切上誤差, 第 $m+1$ 桁目の数字が 5 以上
 のとき切上, 4 以下のとき切捨を行うために生ずる誤差を四捨
 五入誤差ということにする. (三者を総稱して丸め誤差とよぼう)

§3. 二段解法の分類.

(3) は次のように分類される.

$-1 < \alpha < 1$ の場合.

- i) $\alpha > 0, \quad y_{m+2} = C_1 y_{m+1} - C_2 y_m, \quad 2 > C_1 > 0, \quad 1 > C_2 > 0$
 - ii) $\alpha < 0, \quad y_{m+2} = C_1 y_{m+1} + C_2 y_m, \quad 1 > C_1 > 0, \quad 1 > C_2 > 0$
 - iii) $\alpha = 0, \beta < 1, \quad y_{m+2} = C_1 y_{m+1} - C_2 y_m \quad 1 \gg C_2 > 0, \quad 1 - \beta C_1 > C_1 > 0$
 - iv) $\alpha = 0, \beta > 1, \quad y_{m+2} = C_1 y_{m+1} + C_2 y_m \quad 1 \gg C_2 > 0 \quad 1 > C_1 > 0$
- (4)

$\alpha = -1$ の場合

- vi) $\beta < 0$ $y_{n+2} = c_1 y_{n+1} + c_2 y_n$ $1 \gg c_1 > 0, 1 \gg c_2 > 0$
 vii) $0 < \beta < 1$ $y_{n+2} = c_1 y_n - c_2 y_{n+1}$ $1 \gg c_2 > 0, 1 \gg c_1 > 0$
 viii) $1 < \beta < 2$ $y_{n+2} = c_1 y_n - c_2 y_{n+1}$ $1 \gg c_2 > 0, 1 \gg c_1 > 0$
 ix) $2 \leq \beta$ $y_{n+2} = c_1 y_n - c_2 y_{n+1}$ $1 + 2\beta > c_1 > 0, 1 \gg c_2 > 0$
 x) $\beta = 0$ $y_{n+2} = (1 - 2h) y_n$ (Euler 法)

以上のことから次のようなことがわかる。

i) i) — vii) の場合 理論値は $y_n \rightarrow 0$ として y_n の切捨られた値を \bar{y}_n とすれば $y_n > 0$ なら $y_n > \bar{y}_n$, $y_n < 0$ なら $y_n < \bar{y}_n$ であるから 同じく $\bar{y}_n \rightarrow 0$ 。

ii) viii) の場合は $(\lambda_1 > \lambda_2 > 0)$ もし初期値出発値が $\lambda_1 > \frac{y_1}{y_0} > \lambda_2$ ならば $y_n = \frac{y_1 - \lambda_2 y_0}{\lambda_1 - \lambda_2} \lambda_1^n + \frac{\lambda_2 y_0 - y_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \lambda_2^n$ からわかるように $y_2, y_3, \dots, y_n, \dots$ は単調減少で $y_n < 0$ とはなることはない。

さて実際に解法式(3)を用いて計算した場合誤差が入るから、すぐにはそうとはわからない。ここでは切捨誤差のみの場合について考えよう。計算値を \hat{y}_n とする。(但し計算機による計算は各項 m 桁まで計算し、掛算、割算は $2m$ 桁まで計算して m 桁(いずれも小数点以下の桁)までに切捨るものとする) $y_{n+2} = c_1 y_{n+1} \pm c_2 y_n$ にて $n=0, 1, \dots$ を考えれば明らかのように \hat{y}_2 と y_2 とは m 桁まで一致し、 \hat{y}_n と y_n とは

(5)

同様である。よって $y_n > y_{n+1}$ ならば $\hat{y}_n \geq \hat{y}_{n+1}$ 、よって $\bar{y}_n \rightarrow 0$ ならば $\hat{y}_n \rightarrow 0$ である。

i, iii) の場合 $\lambda_1 > \frac{y_1}{y_0} > \lambda_2$ ならば \hat{y}_n も単調減少である。

ii) iv) の場合 $y_0 > y_1 > 0, y_2 > 0$ ならば $C_1 > 0, C_2 > 0$ から $\bar{y}_n < 0$ となることはなく、もし $y_2 < y_1$ ならば単調減少である。何故ならば $y_{n+2} - y_{n+1} = C_1(y_{n+1} - y_n) + C_2(y_n - y_{n+1}) < 0$ であるからである。

ロ) vii) viii) の場合、 $|\lambda_2| > 1$ であるから $n \rightarrow \infty$ に対して y_n は絶対値が無限に増大する正負の振動をする筈である。しかし四捨五入のためゆらぎしてもそうとは限らない。例えば $h=0.1, \beta=1.1, \lambda=-1$ のとき $y_{n+2} = 0.91y_n - 0.11y_{n+1}$ 、ここで $y_0=1, y_1=0.8976$ とすれば $e_1=0.9985, e_2=0.0015$ 。 e_2 が小さいときは計算桁数を少なくとれば $y_n \rightarrow 0$ となる。桁数を多くとって計算すれば勿論 y_n は振動する。この場合 $\lambda_1=0.9005, \lambda_2=-1.0105$ で小数点以下三桁だけとって計算すれば $|e_2 \lambda_2^n|$ が三桁目以上の影響を与えないのは 100 回目位か、50 回目位の計算で y_{50} が零に近くなってしうためである。四桁計算をすれば y_n は逐には大きな振動をする。

| | | | |
|-----------------|------------------|-------------------|------------------|
| 二桁計算 $y_1=0.89$ | 三桁計算 $y_1=0.897$ | 四桁計算 $y_1=0.8976$ | $y_{70}=0.0108$ |
| $y_{50}=0.07$ | $y_{40}=0.021$ | $y_{44}=0.0197$ | $y_{71}=-0.0097$ |
| $y_{38}=0.00$ | $y_{70}=0.000$ | $y_{45}=-0.0003$ | $y_{81}=-0.0104$ |
| | | $y_{76}=0.0177$ | $y_{82}=0.0110$ |

ハ) vii) viii) に属する方法なら同様であるが、例えは $y_{n+2} = y_n - 2h y_{n+1}$

において $\lambda^2 + 2h\lambda - 1 = 0$ の二根は $\lambda_1 = \sqrt{1+h^2} - h$, $\lambda_2 = -(\sqrt{1+h^2} + h)$.

$y_0 = 1$, $y_1 = \lambda_1$ にすれば $e_2 = 0$. 故て $y_n = e_1 \lambda_1^n = \lambda_1^n$ となり振動

しない筈であるが、 λ_1 の値として例えは 0.618 をとれば一般に

は無限に振動する。これは乗数値 $e_1 + e_2 = 1$, $e_1 \lambda_1 + e_2 \lambda_2 =$

0.618 1 に等しいことにより $y_n = e_1 \lambda_1^n + e_2 \lambda_2^n$ により $e_2 \neq 0$

のために振動がある。この場合二回目以下にて切捨を

行わないとして計算であって毎回切捨を行えば更に複雑

になる(次を参照)二回目以下切捨を行わない例として $h = 0.5$.

$y_2 = 1 - 0.618 = 0.382$, $y_3 = 0.618 - 0.382 = 0.236$, $\dots \dots y_{10} = 0.010$

$y_{11} = 0.002$, $y_{12} = 0.008$, $y_{13} = -0.006$, $y_{14} = 0.014$, $y_{15} = -0.020 \dots$

ニ) vii) viii) では減法が特徴であるがもし $0 < C_1 \leq 1$ なら

ば y_0, y_1 を正にとるとき m 桁までの切捨計算をするとする、

m が増せば減法のため y_m は減少し逐には m 桁まで零と

なる。その番号を m_1 とする。 $m_1 - 1$ 番目は正であるから $m_1 + 1$ 番目

または $m_1 + 2$ 番目は負となる。(C_1 が小なときは m 桁まで零と

なっていくこともある)。よってそこから先は零であるか、又は正、

負の振動を繰り返す(尤も m 桁まで零となる前に単調減少

性が保たれて一つおきには単調減少することになり負数が現れ

て振動することもある)。

上の場合、正負交互に現われてからは、絶対値が無限に増大するか、或は極大に達し後減少して零に近づくかはこれだけではわからない。

この現象はいかほど桁数を多くとって一定桁数の切捨計算ではゆるぎおこる。そして又いかほど長くともそこまで單調減少性の破れぬ計算法もありうることは明うかである。($y = e_1 \lambda_1^m + e_2 \lambda_2^m$ の式から e_2 を十分小さくするようにすればいい)。

§4. 切捨(切上, 四捨五入)誤差集積の表現

§3 の計算法では $c_1 y_n, c_2 y_{n+1}$ のように乗算二回と加減算一回であるが c_1, c_2, y_n を各 m 桁とするとき乗算、加減算毎に m 桁までに切捨すると、乗算を行い加減算を行ってから最後に m 桁までに切捨するので、最後 m 桁の数字が1だけ異なることがあるので、以下では後者の方法によるものとする。

§3 に述べたように二段数値解法は $y_{n+2} = c_1 y_{n+1} + c_2 y_n$,

$y_{n+2} = c_1 y_{n+1} - c_2 y_n$, $y_{n+2} = c_1 y_n - c_2 y_{n+1}$ の三つの型に限られる。

今 y_n を定差方程式の真値, x_n を切捨計算法値, Y_n を m 桁以下切捨られた切捨値とすれば $\hat{y}_n - Y_n = x_n$ ($n=0, 1, 2, \dots$)

ここで \hat{y}_n は n 回目の計算法値。

$$1) \quad y_{n+2} = c_1 y_n - c_2 y_{n+1}.$$

$$\hat{y}_2 = c_1 x_0 - c_2 x_1 = c_1 (y_0 - Y_0) - c_2 (y_1 - Y_1) = y_2 - c_1 Y_0 + c_2 Y_1 = x_2 + Y_2$$

(8)

$$\hat{y}_3 = c_1 t_1 - c_2 t_2 = y_3 + c_1 c_2 Y_0 - (c_1 + c_2^2) Y_1 + c_2 Y_2 = t_3 + Y_3$$

$$\hat{y}_4 = c_1 t_2 - c_2 t_3 = y_4 - c_1(c_1 + c_2^2) Y_0 + (2c_1 c_2 + c_2^3) Y_1 - (c_1 + c_2^2) Y_2 + c_2 Y_3 = t_4 + Y_4$$

$$\begin{aligned} \hat{y}_5 = c_1 t_3 - c_2 t_4 = y_5 + c_1(2c_1 c_2 + c_2^3) Y_0 - (c_1^2 + 3c_1 c_2^2 + c_2^4) Y_1 + (2c_1 c_2 + c_2^3) Y_2 \\ - (c_1 + c_2^2) Y_3 + c_2 Y_4 = t_5 + Y_5 \end{aligned}$$

これらの式から \hat{y}_{k+1} における Y_1, Y_2, \dots, Y_k (Y_0 の係数を除き) の係数はその前の符号をも含めて、それらに次々 $\alpha_k, \alpha_{k-1}, \dots, \alpha_1$ とするとき ($\alpha_0 = -1, \alpha_1 = c_2$)

$$\alpha_{l+2} = c_1 \alpha_l - c_2 \alpha_{l+1} \quad 1 \leq l, \quad l+2 \leq K.$$

これはまた \hat{y}_l における Y_i ($1 \leq i < l$) の係数を $\alpha_{l,i}$ とするとき

$$\alpha_{l+2,i} = c_1 \alpha_{l,i} - c_2 \alpha_{l+1,i} \quad (\alpha_{l,i} \equiv \alpha_{l-i})$$

全く同じ算法で求められる。

Y_0 の係数も c_1 を除けば上と同じ関係式で求められる。

次に y_n を y_0, y_1 にて表わすと。

$$y_2 = c_1 y_0 - c_2 y_1$$

$$y_3 = -c_1 c_2 y_0 + (c_1 + c_2^2) y_1$$

$$y_4 = c_1(c_1 + c_2^2) y_0 - (2c_1 c_2 + c_2^3) y_1$$

$$y_5 = -c_1(2c_1 c_2 + c_2^3) y_0 + (c_1^2 + 3c_1 c_2^2 + c_2^4) y_1$$

であるからこの係数も全く上の α_l と同じ規則に従うことがわかる。

一方 $y_n = e_1 \lambda_1^n + e_2 \lambda_2^n$ であって $e_1 + e_2 = y_0$, $e_1 \lambda_1 + e_2 \lambda_2 = y_1$ であるから e_1, e_2 を解いて代入すると

$$y_n = \frac{-\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1^{n-1} - \lambda_2^{n-1})}{\lambda_1 - \lambda_2} y_0 + \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2} y_1$$

1) の場合には $\lambda^2 + c_2 \lambda - c_1 = 0$ であるから $-c_1 = \lambda_1 \lambda_2$.

よって一般に

$$\frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2} = -\alpha_n$$

これによって評価誤差 Y_1, Y_2, \dots のため \hat{y}_n が y_n からどれだけ異なるかの評価式が Y_1, Y_2, \dots と λ_1, λ_2 とによって完全に表わされることをみる。

2) $y_{n+2} = c_1 y_{n+1} - c_2 y_n$ 全く同様であるから計算だけを書く。

$$\hat{y}_2 = y_2 + c_2 y_0 - c_1 y_1 = t_2 + Y_2$$

$$\hat{y}_3 = y_3 + c_1 c_2 y_0 - (c_1^2 - c_2) y_1 - c_1 y_2 = t_3 + Y_3$$

$$\hat{y}_4 = y_4 + c_2 (c_1^2 - c_2) y_0 - (c_1^3 - 2c_1 c_2) y_1 - (c_1^2 - c_2) y_2 - c_1 y_3 = t_4 + Y_4$$

$$\hat{y}_5 = y_5 + c_2 (c_1^3 - 2c_1 c_2) y_0 - (c_1^4 - 3c_1^2 c_2 + c_2^2) y_1 - (c_1^3 - 2c_1 c_2) y_2 - (c_1^2 - c_2) y_3 - c_1 y_4 = t_5 + Y_5$$

$$\alpha_{l+2} = c_1 \alpha_{l+1} - c_2 \alpha_l$$

$$y_2 = c_1 y_1 - c_2 y_0, \quad y_3 = (c_1^2 - c_2) y_1 - c_1 c_2 y_0, \quad y_4 = (c_1^3 - 2c_1 c_2) y_1 - c_2 (c_1^2 - c_2) y_0$$

$$y_5 = (c_1^4 - 3c_1^2 c_2 + c_2^2) y_1 - c_2 (c_1^3 - 2c_1 c_2) y_0$$

$$\lambda^2 - c_1 \lambda + c_2 = 0 \quad \text{であるから} \quad \lambda_1 \lambda_2 = c_2$$

一般に

$$\frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2} = -\alpha_n$$

(V0)

$$3) \quad y_{n+2} = c_1 y_n + c_2 y_{n+1}$$

$$\hat{y}_2 = y_2 - c_1 y_0 - c_2 y_1 = t_2 + Y_2$$

$$\hat{y}_3 = y_3 - c_1 c_2 y_0 - (c_1 + c_2^2) y_1 - c_2 y_2 = t_3 + Y_3$$

$$\hat{y}_4 = y_4 - c_1 (c_1 + c_2^2) y_0 - (2c_1 c_2 + c_2^3) y_1 - (c_1 + c_2^2) y_2 - c_2 y_3 = t_4 + Y_4$$

$$\hat{y}_5 = y_5 - c_1 (2c_1 c_2 + c_2^3) y_0 - (c_1^2 + 3c_1 c_2^2 + c_2^4) y_1 - (2c_1 c_2 + c_2^3) y_2 - (c_1 + c_2^2) y_3 - c_2 y_4 = t_5 + Y_5$$

$$d_{l+2} = c_1 d_l + c_2 d_{l+1}$$

$$y_2 = c_1 y_0 + c_2 y_1, \quad y_3 = c_1 c_2 y_0 + (c_1 + c_2^2) y_1, \quad y_4 = c_1 (c_1 + c_2^2) y_0 + (2c_1 c_2 + c_2^3) y_1,$$

$$y_5 = c_1 (2c_1 c_2 + c_2^3) y_0 + (c_1^2 + 3c_1 c_2^2 + c_2^4) y_1,$$

$$\lambda^2 - c_2 \lambda - c_1 = 0 \quad \text{であるから} \quad -c_1 = \lambda_1 \lambda_2$$

一般に

$$\frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2} = -d_n$$

以上の三つの場合を $y_{n+2} = c'_1 y_n + c'_2 y_{n+1}$ として c'_1, c'_2 に正負を考慮することにすれば一つの式で表わせるが実際には別々に考える方がわかり易い。

以上の公式は切捨て誤差として論じてきたが、切上誤差、四捨五入誤差の公式をも表わしている。

$\hat{y}_n = \text{整数部} + \text{小数部}$ と表わすとき 小数部 $= 0.p_1 p_2 \dots p_m p_{m+1} \dots$
と表わすとき $s_m = 0.p_1 \dots p_m, Y_m = 0.\overbrace{0 \dots 0}^m p_{m+1} p_{m+2} \dots$

切捨て誤差として $\hat{y}_m > 0$ ならば $Y_m > 0$, $\hat{y}_m < 0$ ならば $Y_m < 0$

$x_n = \text{整数部} + s_m$ となる。

切上誤差として $S_n = 0.p_1 p_2 \cdots p_m (p_m + 1)$, $Y_n = 0.0 \overbrace{\cdots 0}^m p_{m+1} \cdots$
 $- 0.0 \overbrace{\cdots 0}^{m-1} 1$ として $\hat{y}_m > 0$ ならば $Y_m < 0$, $\hat{y}_m < 0$ ならば $Y_m > 0$

四捨五入誤差として $0 \leq p_{m+1} < 5$ ならば $S_n = 0.p_1 \cdots p_m$,
 $Y_m = 0.0 \overbrace{\cdots 0}^m p_{m+1} \cdots$, $5 \leq p_{m+1} < 5$ ならば $S_n = 0.p_1 \cdots p_m (p_m + 1)$,
 $Y_m = 0.0 \overbrace{\cdots 0}^m p_{m+1} \cdots - 0.0 \overbrace{\cdots 0}^{m-1} 1$

$t_n = \text{整数部} + S_n$, Y_n を上の公式に代入すれば三つの場合に全く同じ関係式が成立する

§5 或場合における丸め誤差の正確な評価.

vii) viii) の場合 h を一定にして計算をつづければ逐には正, 負の間に無限に振動をはじめる. これは公式 $y_n = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n$, $c_2 \neq 0$ による λ_2^n に原因する筈であるが, 一方切捨誤差も例えは $c_1 = c_2 = 1$ とすれば §4 から明らかになるように $1, 1, 2, 3, 5, \dots, 144$ 倍とすみやかに増大する (実際数値計算をやってみてもわかる).

上記の振動はいずれの原因によるものかを詳しく考えよう.

§4 の理論をつかって \hat{y}_n (計算値) と差分方程式の真値 y_n とを比較すれば

$$\begin{aligned} \hat{y}_n = y_n &+ \lambda_1 \lambda_2 \frac{\lambda_1^{n-1} - \lambda_2^{n-1}}{\lambda_1 - \lambda_2} Y_0 - \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2} Y_1 - \frac{\lambda_1^{n-1} - \lambda_2^{n-1}}{\lambda_1 - \lambda_2} Y_2 - \cdots - \frac{\lambda_1^{n-i} - \lambda_2^{n-i}}{\lambda_1 - \lambda_2} Y_{i+1} \\ &- \cdots - \frac{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}{\lambda_1 - \lambda_2} Y_{n-1} \end{aligned}$$

$|\lambda_1| < 1$ であるから, λ_1 に因する中級数は h を一定とすれば収束する

(12)

よって λ_2 の方のみを考えると

$$\frac{\lambda_2^m}{\lambda_1 - \lambda_2} \left\{ \lambda_1 y_0 - y_1 - \lambda_1 Y_0 + Y_1 + \frac{Y_2}{\lambda_2} + \frac{Y_3}{\lambda_2^2} + \dots + \frac{Y_{m-1}}{\lambda_2^{m-2}} \right\}$$

これが小さくなるためには各計差毎に小数点 m 桁以下の切捨は毎回必ずおこなうから Y_1, Y_2, \dots, Y_{m-1} は殆んどすべて第 $m+1$ 位からはまる小数である。

よって λ を一定にするとせば $\lambda_1 y_0 - y_1$ すなわち定差方程式の解よりおこる大きな振動と、切捨誤差の集積からおこる大きな振動との混在するものであることがわかる。しかも λ を漸次零に向って減少させれば $\lambda_2 \rightarrow 1$ であることから切捨誤差の集積による影響の方が大きくなる筈である。

§6 誤差公式の一般化。

二段数値解法(2)を線型方程式 $y' = f_1(x)y + f_2(x)$ に適用するとき、線型定差方程式 $y_{n+2} = g_1(n)y_n + g_2(n)y_{n+1}$ の二つの独立な解 $y_1(n), y_2(n)$ をとれば §4 において λ_1^n, λ_2^n の代りに y_1, y_2 を使うことにより同様の関係式が得られる。

また、線型三段、四段数値解法についても前 §5 と同様の論法は適用できる。

ここでは二段解法(2)と一般の微分方程式 $y' = f(x, y)$ に適用した式を掲げておこう

$$t_0 + Y_0 = y_0, \quad t_1 + Y_1 = y_1, \quad f_1 = f(x_1, y_1), \quad \hat{f}_1 = f(x_1, t_1),$$

更らに $f(x, y)$ を x, y の有理演算にて近似した式を $R(x, y)$ とし

$E(x, y)$ は truncation error とする。ただし $E_n = E(x_n, y_n) = E(x_n, t_n)$

と簡単のためとする。 $\hat{f}_n = f(x_n, t_n) = R(x_n, t_n) + E_n$ である

$$f(x, y) = R(x, y) + E(x, y)$$

から順次計算を行うと

$$\hat{f}_1 = f(x_1, t_1) = R(x_1, t_1) + E_1 = R(x_1, y_1) - Y_1 \frac{\partial K}{\partial y} + E_1$$

$$= f_1 - S_1 = \pi_1 + \Pi_1 \quad \text{と書く。} \quad (c_1, c_2 \text{ は正又は負とす})$$

$$\hat{y}_2 = c_1 t_0 + c_2 \pi_1 = c_1 (y_0 - Y_0) + c_2 (f_1 - S_1 - \Pi_1)$$

$$= c_1 y_0 + c_2 f_1 - c_1 Y_0 - c_2 S_1 - c_2 \Pi_1 = y_2 - (c_1 Y_0 + c_2 (S_1 + \Pi_1)) = t_2 + Y_2$$

$$\hat{y}_3 = c_1 t_1 + c_2 \pi_2 = c_1 (y_1 - Y_1) + c_2 \pi_2$$

$$\hat{f}_2 = f(x_2, t_2) = R(x_2, t_2) + E_2 = E_2 + R(x_2, y_2 - (c_1 Y_0 + c_2 (S_1 + \Pi_1) + Y_2))$$

$$c_1 Y_0 + c_2 (S_1 + \Pi_1) + Y_2 \equiv Z_2$$

$$\hat{f}_2 = E_2 + R(x_2, y_2 - Z_2) = E_2 + R(x_2, y_2) - S_2 = f_2 - S_2 = \pi_2 + \Pi_2$$

$$\hat{y}_3 = c_1 (y_1 - Y_1) + c_2 (f_2 - S_2 - \Pi_2) = y_3 - (c_1 Y_1 + c_2 (S_2 + \Pi_2)) = t_3 + Y_3$$

$$c_1 Y_1 + c_2 (S_2 + \Pi_2) + Y_3 \equiv Z_3$$

$$\hat{f}_3 = R(x_3, t_3) + E_3 = E_3 + R(x_3, y_3 - (c_1 Y_1 + c_2 (S_2 + \Pi_2) + Y_3))$$

$$= E_3 + R(x_3, y_3) - S_3 = f_3 - S_3 = \pi_3 + \Pi_3$$

$$\hat{y}_4 = c_1 (\hat{y}_2 - Y_2) + c_2 \pi_3 = c_1 (y_2 - (Z_2 - Y_2) - Y_2) + c_2 \pi_3 = c_1 (y_2 - Z_2) + c_2 \pi_3$$

$$\text{ただし } t_2 + Y_2 = \hat{y}_2.$$

$$\hat{y}_4 = c_1 (y_2 - Z_2) + c_2 (f_3 - S_3 - \Pi_3) = y_4 - (c_1 Z_2 + c_2 (S_3 + \Pi_3)) = t_4 + Y_4$$

以下同様にして

$$\hat{y}_5 = y_5 - (c_1 Z_3 + c_2 (S_4 + \Pi_4)) = t_5 + Y_5$$

.....